

DS2-a premier problème : CCP 2016

Nous nous intéressons dans cet exercice à l'étude de quelques propriétés de la logique propositionnelle tri-valuée. En plus des deux valeurs classiques VRAI ($\top$) et FAUX ($\perp$) que peut prendre une expression, la logique propositionnelle tri-valuée introduit une troisième valeur INDETERMINE (?).

$\mathcal{V}$ est l'ensemble des variables propositionnelles et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules construites sur $\mathcal{V}$. Pour $A, B \in \mathcal{V}$, les tables de vérité des opérateurs classiques dans cette logique propositionnelle sont les suivantes :

(a) $A \wedge B$			(b) $A \vee B$			(c) $A \Rightarrow B$		
A	B	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$	A	B	$A \Rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	?	?	$\top$	?	$\top$	$\top$	?	?
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	?	$\perp$	$\perp$	?	?	$\perp$	?	$\top$
?	$\top$	?	?	$\top$	$\top$	?	$\top$	$\top$
?	$\perp$	$\perp$	?	$\perp$	?	?	$\perp$	?
?	?	?	?	?	?	?	?	$\top$

(d) $\neg A$	
A	$\neg A$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$
?	?

Définitions

Définition 1 Tri-valuation.

Une tri-valuation est une fonction $f : \mathcal{V} \rightarrow \{\top, \perp, ?\}$.

On étend alors de manière usuelle la notion de tri-valuation sur l'ensemble des formules :

Définition 2 Une tri-valuation sur l'ensemble des formules est une fonction $\hat{f} : \mathcal{F} \rightarrow \{\top, \perp, ?\}$.

Définition 3 Une tri-valuation $\hat{f}$ satisfait une formule ϕ si $\hat{f}(\phi) = \top$. On notera alors $\hat{f} \vdash_3 \phi$.

Définition 4 Formule.

Une formule ϕ est :

- une conséquence d'un ensemble de formules $\mathcal{X}$ si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de $\mathcal{X}$ satisfait ϕ . On notera dans ce cas $\mathcal{X} \Vdash_3 \phi$;
- une tautologie si pour toute tri-valuation $\hat{f}$, $\hat{f}(\phi) = \top$. On notera dans ce cas $\Vdash_3 \phi$.

Questions

I.1. Montrer que $A \vee \neg A$ n'est pas une tautologie.

I.2. Proposer alors une tautologie simple dans cette logique.

Posons $\top = 1, \perp = 0$ et $? = 0,5$.

I.3. Proposer un calcul simple permettant de trouver la table de vérité de $A \wedge B$ en fonction de A et B . Même question pour $A \vee B$.

I.4. En logique bi-valuée classique, les propositions $\neg A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes. Qu'en est-il dans le cadre de la logique propositionnelle tri-valuée ?

I.5. En écrivant les tables de vérité, indiquer si les propositions $\neg B \Rightarrow \neg A$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes.

I.6. Donner la table de vérité de la proposition $((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. Cette proposition est-elle une tautologie ?

Un nouvel opérateur d'implication, noté $\rightarrow$, est alors défini, dont la table de vérité est la suivante :

A	B	$A \rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$?$	$?$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$?$	$\top$
$?$	$\top$	$\top$
$?$	$\perp$	$?$
$?$	$?$	$?$

I.7. $A \rightarrow A$ est-elle une tautologie ?

I.8. Montrer qu'il n'existe aucune tautologie en utilisant uniquement cette définition de l'implication.

I.9. La proposition suivante est-elle une tautologie :

“ $(\{A\} \Vdash_3 B)$ est équivalent à $(\Vdash_3 A \rightarrow B)$ ” ?

On définit alors un type `FormuleLogique` représentant les formules de la manière suivante : `type FormuleLogique`

```
|Vrai (* Constante Vrai*)
|Faux (* Constante Faux*)
|Indétermine (* Constante Indeterminé*)
|Var of string (* Variable propositionnelle*)
|Non of FormuleLogique (* Négation d'une formule*)
|Et of FormuleLogique*FormuleLogique (* conjonction de deux formules*)
|Ou of FormuleLogique*FormuleLogique (* disjonction de deux formules*)
|Implique of FormuleLogique*FormuleLogique (* implication*)
```

I.10. Avec la représentation précédente, écrire en CaML la formule :

$$((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B)) \Rightarrow B .$$

I.11. Écrire alors une fonction récursive CaML `lectureFormule`, prenant en argument une formule et renvoyant une chaîne de caractères spécifiant comment un lecteur lirait la formule. Ainsi, par exemple, pour $\phi = A \wedge (\neg B)$, `lectureFormule  $\phi$` renvoie `A et non B`.

DS2-a deuxième problème : CCP 2015

De nombreux travaux sont réalisés en Intelligence Artificielle pour construire un programme qui imite le raisonnement humain et soit capable de réussir le test de Turing, c'est-à-dire qu'il ne puisse pas être distingué d'un être humain dans une conversation en aveugle. Vous êtes chargé(e)s de vérifier la correction des réponses données par un tel programme lors des tests de bon fonctionnement. Dans le scénario de test considéré, le comportement attendu est le respect de la règle suivante : pour chaque question, le programme répondra par trois affirmations dont une seule sera correcte.

Nous noterons A_1 , A_2 et A_3 les propositions associées aux affirmations effectuées par le programme.

Question I.1 Représenter le comportement attendu sous la forme d'une formule du calcul des propositions qui dépend de A_1 , A_2 et A_3 .

1 Premier cas

Vous demandez au programme : *Quels éléments doivent contenir les aliments que je dois consommer pour préserver ma santé ?*

Il répond les affirmations suivantes :

A_1 Consommez au moins des aliments qui contiennent des glucides, mais pas des lipides !

A_2 Si vous consommez des aliments qui contiennent des glucides alors ne consommez pas d'aliments qui contiennent des lipides !

A_3 Ne consommez aucun aliment qui contient des lipides !

Nous noterons G , respectivement L , les variables propositionnelles qui correspondent au fait de consommer des aliments qui contiennent des glucides, respectivement des lipides.

Question I.2 Exprimer A_1 , A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions. Ces formules peuvent dépendre des variables G et L .

Question I.3 En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer ce que doivent contenir les aliments que vous devez consommer pour préserver votre santé.

2 Second cas

Vous demandez au programme : *Quelles activités dois-je pratiquer si je veux préserver ma santé ?*

Suite à une coupure de courant, la dernière affirmation est interrompue.

A_1 Ne faites des activités sportives que si vous prenez également du repos !

A_2 Si vous ne faites pas d'activité intellectuelle alors ne prenez pas de repos !

A_3 Prenez du repos ou faites des activités ...!

Nous noterons S , I et R les variables propositionnelles qui correspondent au fait de faire des activités sportives, des activités intellectuelles et de prendre du repos.

Question I.4 Exprimer A_1 , A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions. Ces formules peuvent dépendre de S , I et R .

Question I.5 En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer quelle(s) activité(s) vous devez pratiquer pour préserver votre santé.

DS2-a troisième problème : CCP 2017

Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau.

Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X , Y et Z . Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.

Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :

X indique : « Le village se trouve dans la vallée » ;

Z réplique : « Non, il ne s'y trouve pas » ;

X reprend : « Ou alors dans les collines ».

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve le village.

Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet.

Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre le village dans la région concernée.

X dit : « Le chemin de gauche conduit au village » ;

Z répond : « Tu as raison » ;

X complète : « Le chemin de droite y conduit aussi » ;

Y affirme : « Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas » ;

Z indique : « Celui du milieu n'y conduit pas ».

Nous noterons G , M , D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit au village.

Nous noterons X_2 , Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X , de Y et de Z sur le second sujet.

- Q1.** Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1 .
- Q2.** Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C .
- Q3.** En utilisant la résolution avec les propriétés des opérateurs booléens et les formules de De Morgan en calcul des propositions, déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre le village.
- Q4.** Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2 , Y_2 et Z_2 .
- Q5.** Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2 , Y_2 et Z_2 dépendant des variables G , M et D .
- Q6.** En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre le village.
- Q7.** En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ? Si oui, le ou lesquels ?