Devoir surveillé 3 a

CCP exercices de logique

Option informatique MP1, MP2 & MP3

I CCP 2016 Logique tri-valuée

I.1

$\hat{f}(A \vee \neg A)$ prend la valeur ? si $\hat{f}(A) =?$; ce n'est pas une tautologie.

I.2

On a $\hat{f}(A \Rightarrow A) = \top$ quelle que soit la valeur de $\hat{f}(A)$: c'est une tautologie.

I.3

On a $\hat{f}(A \wedge B) = \min\{\hat{f}(A), \hat{f}(B)\}$ et $\hat{f}(A \vee B) = \max\{\hat{f}(A), \hat{f}(B)\}$

I.4

Si $\hat{f}(A) = \hat{f}(B) =?$ alors $\hat{f}(\neg A \vee B) =?$ alors que $\hat{f}(A \Rightarrow B) = \top$: $\neg A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ ne sont pas équivalentes dans le cadre de la logique propositionnelle tri-valuée.

I.5

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?	?
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	?	$\top$	$\top$
?	$\top$	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?	?
?	?	$\top$	$\top$

$A \Rightarrow B$ et $\neg B \Rightarrow \neg A$ sont toujours équivalentes dans ce cadre.

I.6

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow B$	$((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B)$	B	ψ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	?	?	$\top$	?	?	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	?	$\top$	?	?	?	$\top$
?	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?	?	?	$\bot$	?
?	?	$\top$	$\top$	$\top$	?	?

Les deux dernières lignes montrent que $((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B) \Rightarrow B$ n'est pas une tautologie dans le cadre de la logique propositionnelle tri-valuée.

I.7

$\hat{f}\big(A \to A\big)$ prend la valeur ? si $\hat{f}(A) =?$; ce n'est pas une tautologie.

I.8

La question est ambigüe : que signifie "uniquement cette définition de l'implication" ?
On peut prouver qu'aucune formule écrite uniquement avec l'opérateur $\to$ n'est une tautologie.
On vaprouver le résultat plus général : aucune formule écrite dans le cadre de la logique propositionnelle tri-valuée et définie à partir de $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\to$ n'est une tautologie.
Pour cela on va prouver que$\hat{f}(\phi) =?$ pour la valuation f telle que $f(A) =?$ pour toute variable propositionnelle $A \in \mathcal{V}$. On peut écrire la démonstration par induction structurelle ou, plus simplement mais plus longuement, par récurrence sur le nombre d'opérateurs.
Pour les formules sans opérateur, les variables, on a $\hat{f}(A) = f(A) =?$.
On suppose que $\hat{f}(\phi) =?$ pour toute formule comportant au plus n opérateurs.
Si one formule ψ contient $n+1$ opérateurs, elle est de la forme $\psi = \neg\phi 0$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \to \phi_2$ avec ϕ_0 comportant n opérateurs, ϕ_1 et ϕ_2 en contenant n au plus. D'après l'hypothèse de récurrence $\hat{f}(\phi_0) = \hat{f}(\phi_1) = \hat{f}(\phi_2) =?$ donc $\hat{f}(\psi) =?$ d'après les tables de vérité.
Le résultat est donc prouvé pour toute formule.

I.9

Cette question n'a pas de sens.

- $\models$ n'est pas un opérateur pour une formule.
- De quelle équivalence s'agit-il ici ?

On se contente d'une démonstration minimale (le rapport parle de question facile ...)
Si $A = B$ on a $\{A\} \models_3 A$ qui est vraie car toute valuation qui satisfait A, satisfait A.
Par contre on a vu que $A \to A$ n'est pas toujours vraie.

I.10

```
let a = Var "A" in
let b = Var "A" in
let phi = Implique (Et (Implique (a, b), Implique (Non a, b), b);;
```

I.11

```
let rec lectureFormule phi =
   match phi with
   |Vrai -> "V"
   |Faux -> "F"
   |Indetermine -> "?"
   |Var ch -> ch
   |Non phi0 -> "non"^(lectureFormule phi0)
   |Et phi1 phi2 -> "("^(lectureFormule phi1)^" et "
                     ^(lectureFormule phi2)^")"
   |Ou phi1 phi2 -> "("^(lectureFormule phi1)^" ou "
                     ^(lectureFormule phi2)^")"
   |Implique phi1 phi2 -> "("^(lectureFormule phi1)^" implique "
                           ^(lectureFormule phi2)^")";;
```

II CCP 2015

II.1

$\big(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3\big) \vee \big(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3\big) \vee \big(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3\big)$

II.2

$A_1 \equiv G \wedge \neg L$, $A_2 \equiv G \Rightarrow \neg L \equiv \neg G \vee \neg L$, $A_3 \equiv \neg L$

II.3

On va simplifier chaque conjonction.
$A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3 \equiv G \wedge \neg L \wedge \neg(\neg G \vee \neg L) \wedge \neg\neg L \equiv G \wedge \neg L \wedge G \wedge L \wedge L$ est toujours fausse.
$\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3 \equiv \neg(G \wedge \neg L) \wedge (\neg G \vee \neg L) \wedge \neg\neg L \equiv (\neg G \vee L) \wedge (\neg G \vee \neg L) \wedge L \equiv \big(\neg G \vee (L \wedge \neg L)\big) \wedge L$.
Comme $L \wedge \neg L$ est toujours faux, on a $\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3 \equiv \neg G \wedge L$.
$\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3 \equiv \neg(G \wedge \neg L) \wedge \neg(\neg G \vee \neg L) \wedge \neg L \equiv \neg(G \wedge \neg L) \wedge G \wedge L \wedge \neg L$ est toujours fausse.
Ainsi la seule conjonction vraie revient à $\neg G \wedge L$: mangeons des lipides mais pas de glucides.

II.4

$A_1 \equiv S \Rightarrow R \equiv \neg S \vee R$, $A_2 \equiv \neg I \Rightarrow \neg R \equiv I \vee \neg R$, $A_3 \equiv R \vee S$ ou $A_3 = R \vee I$.

II.5

S	I	R	A_1	A_2	$R \vee S$	$R \vee I$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Le seul cas où une seule des conjonction A_i est vraie est celui où $A_3 = R \vee I$ avec les valeurs S vraie et R et I fausse : il faut faire du sport et ne pas se reposer ni réfléchir.

III CCP 2017

III.1

On veut $X_1 \Leftrightarrow Z_1$, c'est-à-dire $X_1 \wedge Z_1 \vee \neg X_1 \wedge \neg Z_1$.

III.2

$X_1 \equiv V \vee C$, $Z_1 \equiv \neg V$

III.3

$X_1 \wedge Z_1 \vee \neg X_1 \wedge \neg Z_1 \equiv (V \vee C) \wedge \neg V \vee \neg (V \vee C) \wedge \neg\neg V \equiv (V \wedge \neg V \vee C \wedge \neg V) \vee \neg V \wedge \neg C \wedge V \equiv C \wedge \neg V$
Le village est dans les collines et n'est pas dans la vallée.

III.4

$X_2 \wedge Y_2 \wedge Z_2 \vee \neg X_2 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg Z_2$

III.5

$X_2 \equiv G \wedge D$, $Y_2 \equiv M \Rightarrow \neg D \equiv \neg M \vee \neg D$ et $Z_2 \equiv G \wedge \neg M$.

III.6

G	M	D	X_2	Y_2	Z_2	$X_2 \wedge Y_2 \wedge Z_2$	$\neg X_2 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg Z_2$
V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F	F

Il y a deux cas possibles où la règle est respectée, dans les deux cas la route du milieu mène au village. On prendra cette route pour aller au village.

III.7

Si on sait que les participants ont tous menti, on est dans la dernière colonne. On sait qu'on parviendra au village en prenant la route du milieu ou la route de droite.